LA FISICA AIUTATA DALLA MATEMATICA

“Gli scienziati non pensano in formule” Albert Einstein.

La fisica “..è scritta in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche..” Galileo Galilei

La cinematica vista con gli occhi del matematico.

Equazione oraria di un moto lungo una linea retta (o anche curva, se non siamo interessati alla direzione ma solo dalla distanza da un punto d’origine):

$$x = f(t)$$

ci fornisce la posizione del mobile all’istante t

$$v = \frac{dx}{dt} = f'(x)$$

ci fornisce la velocità istantanea del mobile al tempo t e

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = f''(x)$$

ci fornisce l’accelerazione posseduta dal mobile all’istante t

Facciamo l’esempio di un corpo che si muove di moto uniformemente accelerato (cioè l’accelerazione rimane costante):

$$x = f(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_o t + s_o$$

dove a è l’accelerazione costante, v_oè la velocità posseduta dal corpo all’istante t=0 (quando abbiamo cominciato ad osservare il moto) e $s_o$la posizione occupata nello stesso istante. Possiamo conoscere la velocità istantanea:

$$v = \frac{dx}{dt} = at + v_o$$

E l’accelerazione

$$a = \frac{dv}{dt} = a$$

Abbiamo così ritrovate formule note.

Ma spesso siamo interessati al processo inverso: conosciamo la forza(e quindi l’accelerazione se la massa rimane costante) a cui è sottoposto un corpo e vogliamo prevedere velocità e posizione in ogni istante. (Vedi un esempio nella pagina seguente)

Siamo in grado di risolvere questo problema solo in casi particolari, negli altri dobbiamo accontentarci di una soluzione approssimata mediante calcoli numerici.

Moto generato da una forza elastica

1)$F = -kx$ (legge di Hooke)

2)$a = \frac{F}{m} = -\frac{k}{m}x$ (2° principio della dinamica)

Vogliamo trovare l'equazione oraria di un corpo che si muove con l'accelerazione data dalla 2

3) $x = f(t)$

Dalle relazioni precedenti

4) $a = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F}{m} = -\frac{k}{m}x$

5)$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$

Questa è una equazione differenziale (una particolare equazione in cui l'incognita non è un numero ma una funzione).

Nel nostro caso cerchiamo la funzione

6) $x = f(t)$

che soddisfi la condizione (relazione 5):

la sua derivata seconda deve essere uguale alla funzione stessa a meno di una costante

E' meglio sfruttare conoscenza acquisite:

sappiamo che in un moto armonico

7) $x = r\sin(\omega t)$

l'accelerazione è dato da

8) $a = -\omega^2 x$

Questo ci suggerisce che una possibile soluzione per la funzione cercata deve avere la forma della (7). Dobbiamo determinare il significato e il valore di **r** e ω nel caso del moto massa molla.

r è il massimo valore che può assumere la funzione e quindi ha il significato di massima ampiezza di oscillazione **A**

ω si può calcolare confrontando la relazione 8 con la 2

$a = -\omega^2 x = -\frac{k}{m}x$ da cui

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Equazione oraria di un corpo appeso ad una molla

$$x = A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$